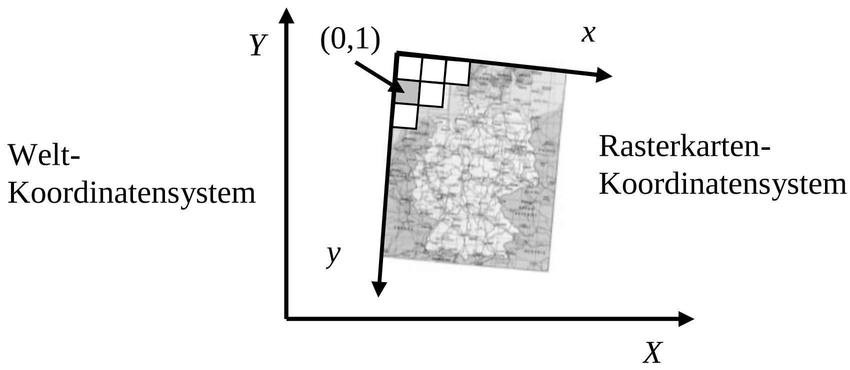
Affintransformation

Bei der Verwendung von GIS-Systemen kann es vorkommen, dass benötigte Karten nur in analoger Form vorliegen. Um analoge Karten im GIS zu verwenden, können diese eingescannt werden. Nach dem Scannvorgang sind die Karten als Rasterbilder auf dem Computer abgespeichert. Mit Hilfe einer *Georeferenzierung* kann nun der Raumbezug der Rasterkarte zur realen Umwelt hergestellt werden.

Die folgende Skizze soll eine mögliche Situation nach dem Scannen aufzeigen.



Das Koordinatensystem der Rasterkarte hat die Besonderheit, dass die y-Achse an der x-Achse gespiegelt wird. Ein Punkt auf der Rasterkarte wird mit den Koordinaten (x,y) festgelegt. Um die Koordinaten (X,Y) dieses Punktes in der realen Welt zu erhalten, wird eine mathematische Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen, die *Affintransformation*, ausgenutzt.

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 y$$
$$Y = b_0 + b_1 x + b_2 y$$

Die Parameter a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 sind noch unbekannt und müssen in einer sogenannten *Transformationsanalyse* bestimmt werden. Anschaulich bewirken die Parameter a_0 und b_0 eine Verschiebung des Rasterkarten-Koordinatensystems in X- und Y-Richtung. Die restlichen 4 Parameter beinhalten zusammen eine Drehung, eine Skalierung in x- und y-Richtung und eine Scherung.

Um die Parameter bestimmen zu können, benötigt man **mindestens** 3 Punkte, deren Koordinaten im Rasterkarten-Koordinatensystem, d.h. am Computer, gemessen werden und deren Koordinaten im Weltkoordinatensystem bekannt sind.

Setzt man die Koordinaten von **genau** 3 Punkten in obige Gleichung ein, so ergeben sich 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten. Die jeweiligen Gleichungen für X und Y können getrennt voneinander untersucht werden, d.h. es entstehen die beiden Linearen Gleichungssysteme

$$X_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 \quad \text{(I)} \qquad\qquad Y_1 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 y_1$$
$$X_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 \quad \text{(II)} \qquad\qquad Y_2 = b_0 + b_1 x_2 + b_2 y_2$$
$$X_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 \quad \text{(III)} \qquad\qquad Y_3 = b_0 + b_1 x_3 + b_2 y_3$$

Die Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar und die Transformationsparameter lassen sich durch Subtraktion und Auflösen der Gleichungen bestimmen.

Mit (I) – (II) und (II) – (III) erhält man

$$X_1 - X_2 = a_1\left(x_1 - x_2\right) + a_2\left(y_1 - y_2\right) \quad \text{(IV)}$$

$$X_2 - X_3 = a_1\left(x_2 - x_3\right) + a_2\left(y_2 - y_3\right) \quad \text{(V)}$$

$(\text{IV})\cdot\left(x_2 - x_3\right) - (\text{V})\cdot\left(x_1 - x_2\right)$ liefert

$$\left(X_1 - X_2\right)\left(x_2 - x_3\right) - \left(X_2 - X_3\right)\left(x_1 - x_2\right) = a_2\left(\left(y_1 - y_2\right)\left(x_2 - x_3\right) - \left(y_2 - y_3\right)\left(x_1 - x_2\right)\right)$$

Durch Auflösen und Rückwärtseinsetzen erhält man die Transformationsparameter:

$$a_2 = \frac{\left(X_1 - X_2\right)\left(x_2 - x_3\right) - \left(X_2 - X_3\right)\left(x_1 - x_2\right)}{\left(y_1 - y_2\right)\left(x_2 - x_3\right) - \left(y_2 - y_3\right)\left(x_1 - x_2\right)} \qquad b_2 = \frac{\left(Y_1 - Y_2\right)\left(x_2 - x_3\right) - \left(Y_2 - Y_3\right)\left(x_1 - x_2\right)}{\left(y_1 - y_2\right)\left(x_2 - x_3\right) - \left(y_2 - y_3\right)\left(x_1 - x_2\right)}$$

$$a_1 = \frac{\left(X_1 - X_2\right) - a_2\left(y_1 - y_2\right)}{\left(x_1 - x_2\right)} \qquad b_1 = \frac{\left(Y_1 - Y_2\right) - b_2\left(y_1 - y_2\right)}{\left(x_1 - x_2\right)}$$

$$a_0 = X_1 - a_1 x_1 - a_2 y_1 \qquad b_0 = Y_1 - b_1 x_1 - b_2 y_1$$

Mit den berechneten Transformationsparametern kann jetzt für jedes Pixel (x,y) in der Rasterkarte das zugehörige Koordinatenpaar (X,Y) im Weltkoordinatensystem berechnet werden. Allerdings sind die Parameter nicht kontrolliert, d.h. falsche Messungen oder Eingaben führen zu einer ungenauen oder völlig falschen Affintransformation.

Eine Kontrolle und Genauigkeitssteigerung der Affintransformation kann durch die Hinzunahme weiterer Punkte in der Analyse erreicht werden. Werden **mehr als** 3 Punkte zur Berechnung der Transformationsparameter verwendet, ist das Gleichungssystem überbestimmt, d.h. es existieren mehr Gleichungen als Unbekannte, und es muss eine Ausgleichung der gemessenen Rasterkoordinaten (x,y) durchgeführt werden (siehe Vorlesung).

Beispiel:

Für die Georeferenzierung einer Rasterkarte wurden die (x,y)-Koordinaten von Punkten gemessen, deren Lage in der realen Welt bekannt ist. In unserem Fall wird die Lage (X,Y) in Gauß-Krüger-Koordinaten beschrieben.

Punkt	Rasterkarte		Reale Welt	
	x	*y*	*X* [m]	*Y* [m]
1	203	296	3512793,17	5405290,48
2	176	1095	3512819,94	5404767,90
3	1110	1224	3513439,90	5404737,86

Mit Hilfe der hergeleiteten Formeln können die Transformationsparameter berechnet werden und man erhält die folgende mathematische Beziehung zwischen der Rasterkarte und der realen Welt.

$$X = 3512643.51 + 0.65607918 \cdot x + 0.05567477 \cdot y$$

$$Y = 5405471.74 + 0.05790052 \cdot x - 0.65208596 \cdot y$$

Einem Pixel (500,400) in der Rasterkarte kann z.B. die Lage

X = 3512993.82 m

Y = 5405239.86 m

im Gauß-Krüger-Koordinatensystem zugeordnet werden.